	Mathématiques	Mars 08
	DEVOIR DE SYNTHESE N°2	Durée : 4h
	4 ème Math	

EXERCICE N°1

On pose $I_0 = \int_1^e x \, dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n \, dx$.

1/ Calculer I_0 et I_1.

2/ a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 I_n + n I_{n-1} = e^2$.

b) En déduire I_2.

3/ a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Déduire de la deuxième question que, pour tout n de IN* on a :

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$$

c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n$.

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (x + 1) \ln x$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A : *Étude d'une fonction auxiliaire.*

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$

1/ Étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2/ Calculer $g'(x)$ puis établir le tableau de variation de g.
3/ En déduire que, pour tout réel strictement positif, $g(x) > 0$.

PARTIE B : *Étude de la fonction f*

1/ Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes.
2/ Calculer $f'(x)$ puis établir le tableau de variation de f.
3/ Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
4/ Vérifier que A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$. Tracer T et $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE N°3

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. BA = 4 et BC = 3.

On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (AC).
Soit $I = A * B$, $J = B * C$ et $K = S_{(BC)}(H)$.

1/ Soit S la similitude directe qui transforme A en B et B en C.
a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
b) Montrer que H est le centre de S.
c) Montrer que $S(I) = J$.

2/ Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $h = S \circ R$.

a) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport.
b) Montrer que le centre O de h est le barycentre des points $(I, 3)$ et $(J, -4)$.

3/ Soit σ la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C.

a) Montrer que σ admet un seul point invariant que l'on notera Ω.
b) Déterminer $\sigma \circ \sigma(A)$. En déduire que $\Omega \in (AC)$.

4/ On pose $f = \sigma \circ S^{-1}$.

a) Caractériser f. En déduire que $\sigma(H) = K$.
b) Montrer que $\Omega \in (BK)$. Construire Ω.
c) Déterminer l'axe de σ.

EXERCICE N°4

1/ a) Justifier que l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
b) Déterminer une solution particulière de l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.
c) En déduire un couple (u_0, v_0) solution de l'équation $23u - 7v = -6$.
d) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23u - 7v = -6$.

2/ Soit le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10\ [23] \\ x \equiv 4\ [7] \end{cases}$

a) Démontrer que x est une solution de (S) si et seulement si il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$
b) En déduire l'ensemble des solutions de (S).

Nom et prénom : ……………………………………………………………………

FEUILLE À RENDRE

EXERCICE N°5

Cocher la réponse exacte.

1/ a et b deux entiers relatifs tels que $a^2 \wedge b^2 = 1$. Alors $a \wedge b$ est égal à

- ☐ $|a|$
- ☐ $|b|$
- ☐ 1

2/ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos 2x \, dx$ vaut *À*

- ☐ $2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos 2x \, dx$
- ☐ 0
- ☐ $2\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}} x^3 \cos 2x \, dx$

3/ Soit S la transformation plane qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right) z + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ et soit Ω (2). Alors

- ☐ ΩMM' est rectangle en Ω.
- ☐ S (Ω) = Ω
- ☐ $S \circ r_{(O,\frac{\pi}{2})}$ est une homothétie

4/ $\lim_{x \to 1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e}{x-1}$ est égale à

- ☐ 1
- ☐ e
- ☐ -e